2^{η} Προσομοίωση Εξετάσεων (Εξ Αποστάσεως) Μιγαδικές Συναρτήσεις Ι

ΔΙΑΡΚΕΙΑ 3 Ώρες

Στοιχειοθεσία Θεμάτων: Δήμογλου Κωνσταντίνος, Μαθηματικός (Msc).

Θέμα 1 Δίνονται οι ισχυρισμοί:

$$P_1 : (z^{\lambda})^{\kappa} = z^{\lambda\kappa},\ \forall\ z, \kappa, \lambda \in \mathbb{C}\,.$$

$$P_2 : \log(e^z) = z,\ \forall\ z \in \mathbb{C}$$

και

$$P_3 : e^{\log z} = z,\ \forall\ z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

Τότε,

(i) Οι ισχυρισμοί P_1, P_2 και P_3 είναι αληθείς.

(ii) Οι ισχυρισμοί P_1, P_2 είναι αληθείς και ο P_3 είναι ψευδής.

(iii) Οι ισχυρισμοί P_1, P_2 είναι ψευδείς και ο P_3 είναι αληθής.

(iv) Οι ισχυρισμοί P_2, P_3 είναι αληθείς και ο P_1 είναι ψευδής.

(v) Οι ισχυρισμοί P_1, P_2 και P_3 είναι ψευδείς.

Θέμα 2 Έστω $f(z) = e^z,\ z \in \mathbb{C}$ και θεωρούμε το σύνολο

$$A = \{z : -1 \leq Re(z) \leq 1,\ 0 \leq Im(z) \leq \pi\}.$$

Τότε, το σύνολο $f(A)$ παριστάνει

(i) άνω δακτύλιο με κέντρο το 0 μικρή ακτίνα e^{-1} και μεγάλη ακτίνα e.

(ii) άνω δίσκο με κέντρο το 0 και ακτίνα e.

(iii) άνω δίσκο με κέντρο το 0 και ακτίνα $\dfrac{1}{e}$.

(iv) άνω δακτύλιο με κέντρο το 0 μικρή ακτίνα e και μεγάλη ακτίνα e^{-1}.

Θέμα 3 Δίνονται τα όρια:

$$I = \lim_{z\to 0} \frac{Re(z) - Im(z)}{z},\ J = \lim_{z\to 1}\ \left[(z-1)^3 e^{1/(z-1)^2}\right] \text{ και } K = \lim_{z\to i} \frac{\log(z-i)}{\sqrt[3]{z-i}}.$$

Τότε,

(i) Τα I, J και K δεν υπάρχουν στο επεκτεταμένο μιγαδικό επίπεδο.

(ii) Τα I, J και K υπάρχουν και είναι πεπερασμένα.

(iii) Τα I, K δεν υπάρχουν στο επεκτεταμένο μιγαδικό επίπεδο, ενώ το J υπάρχει στο ίδιο σύνολο.

(iv) Τα I, J δεν υπάρχουν στο επεκτεταμένο μιγαδικό επίπεδο, ενώ το K υπάρχει στο ίδιο σύνολο.

(v) Τα I, J δεν υπάρχουν στο επεκτεταμένο μιγαδικό επίπεδο και το K υπάρχει στο ίδιο σύνολο.

Θέμα 4 (Σωστό ή Λάθος;) Η σειρά $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{1+z}\right)^n$ συγκλίνει αν και μόνο αν $Re(z) > -\dfrac{1}{2}$.

Θέμα 5 (Σωστό ή Λάθος;) Αν $z_n \to \infty$, τότε η $(Arg(z_n))_{n\in\mathbb{N}}$ είναι συγκλίνουσα.

Θέμα 6 (Σωστό ή Λάθος) Η συνάρτηση $f(z) = Re(z)$ είναι μιγαδικά διαφορίσιμη σε τουλάχιστον ένα σημείο $a \in C$.

Θέμα 7 Η συνάρτηση $f(z) = \log(z^2)$

(i) είναι ολόμορφη στο $\mathbb{C}\setminus(-\infty, 0]$.

(ii) είναι ολόμορφη στο $\mathbb{C}\setminus\{iy: \ y \in \mathbb{R}\}$.

(iii) είναι ολόμορφη στο $\mathbb{C}\setminus\{0\}$.

(iv) δεν είναι πουθενά μιγαδικά διαφορίσιμη.

Θέμα 8 (Σωστό ή Λάθος;) Έστω $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ακέραια. Αν η $|e^f|$ είναι σταθερή στο $\mathbb{C}$, τότε η f είναι σταθερή στο $\mathbb{C}$.

Θέμα 9 Η συνάρτηση $g(z) = \cos z, \ z \in \mathbb{C}$ έχει ανάπτυγμα σε σειρά κέντρου $\dfrac{\pi}{2}$ την

(i) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(z-\pi/2)^{2n}}{(2n)!}$.

(ii) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(z-\pi/2)^{2n+1}}{(2n+1)!}$.

(iii) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(z-\pi/2)^{2n}}{(2n)!}$

(iv) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(z-\pi/2)^{2n+1}}{(2n+1)!}$.

Θέμα 10 (Σωστό ή Λάθος;) Αν για την $(c_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ είναι $|c_n| \to +\infty$, τότε ενδέχεται η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ να είναι το $+\infty$.

Θέμα 11 Η συνάρτηση $f(z) = \dfrac{z^7}{1+z^5}$, έχει τις παραγώγους $f^{(17)}(0)$ και $f^{(21)}(0)$ ίσες με

(i) 0.

(ii) 17! και 21!, αντίστοιχα.

(iii) 0 και $-21!$, αντίστοιχα.

(iv) 17! και 0, αντίστοιχα.

Θέμα 12 (Σωστό ή Λάθος;) Για τυχαία καμπύλη $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ ισχύει:

$$\int_a^b \bar{\gamma}(t)dt = \overline{\int_a^b \gamma(t)dt}.$$

Θέμα 13 Ακέραια συνάρτηση $f\colon C \to \mathbb{C}$ τέτοια ώστε $|f(z)| \leq e^{3Re(z)},\ \forall\ z \in \mathbb{C}$,

(i) δεν υπάρχει.

(ii) υπάρχει και είναι μοναδική.

(iii) υπάρχει και δεν είναι μοναδική.

Θέμα 14 Δίνεται η συνάρτηση $f(z) = \dfrac{\sin z}{z^2+1}$. Η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(Ei)}{n!}(z-Ei)^n$$

(όπου E είναι το έτος γέννησης σας) ισούται με:

(i) $E-1$

(ii) $E+1$

(iii) E

(iv) $+\infty$

Θέμα 15 (Σωστό ή Λάθος;) Η συνάρτηση $f(z) = \bar{z},\ z \in \mathbb{C}$ είναι ολοκληρώσιμη (δηλαδή, έχει αρχική συνάρτηση στο $\mathbb{C}$).

Θέμα 16 Ακέραια συνάρτηση $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ τέτοια ώστε

$$f\left(\frac{i}{n}\right) = e^{1/n} \sin\left(\frac{i}{n}\right),\ \forall\ n \in \mathbb{N}$$

(i) δεν υπάρχει.

(ii) υπάρχει και έχει ρίζα τάξης 2 στο 0.

(iii) υπάρχει και έχει απλές ρίζες τα $k\pi + \frac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}$.

(iv) υπάρχει και έχει απλές ρίζες τα $k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Θέμα 17 Αν E είναι το έτος γέννησής σας, τότε το ολοκλήρωμα

$$I = \int_{\partial D(0,2)} \frac{Ez+1}{(iz+1)^3}dz$$

ισούται με:

(i) $Ei+1$.

(ii) 0.

(iii) $2\pi i(Ei+1)$.

(iv) πE.

Θέμα 18 (Σωστό ή Λάθος;) Η συνάρτηση $f(z) = \dfrac{1}{\cos\left(\dfrac{1}{z}\right)}$ είναι μερόμορφη στο $\mathbb{C}$.

Θέμα 19 (Σωστό ή Λάθος;) Έστω μια συνάρτηση $f\colon D(0,1)\setminus\{0\} \to \mathbb{C}$ ολόμορφη και p ένα μη σταθερό πολυώνυμο. Αν η f έχει πόλο στο 0, τότε η σύνθεση $p\circ f$ έχει πόλο στο 0.

Θέμα 20 (Σωστό ή Λάθος;) Ισχύει:

$$\int_0^{2\pi} \cos(e^{it})dt = 2\pi i.$$

ΚΑΛΗ ΤΥΧΗ!!